Fusion majoritaire de bases de croyances ordonnées sans commensurabilité des échelles de référence

Salem Benferhat, Sylvain Lagrue, Julien Rossit

Fusion majoritaire de bases de croyances ordonnées sans commensurabilité des échelles de référence

A majority-based merging of uncommensurable ranked belief bases

Salem Benferhat Sylvain Lagrue Julien Rossit

CRIL - Université d'Artois
Faculté des Sciences Jean Perrin
Rue Jean Souvraz, SP 18
62307 Lens Cedex

[benferhat,lagrue,rossit]@cril.univ-artois.fr

Résumé

La fusion de croyances provenant de différentes sources potentiellement contradictoires est un domaine de recherche qui a été très étudié ces dernières années. Cependant, les méthodes de fusion actuellement proposées se basent sur l'hypothèse implicite suivante : les échelles de référence des différentes sources doivent être commensurables. Or cette hypothèse peut se révéler beaucoup trop forte si l'on considère des sources réellement hétérogènes. Nous proposons dans cet article d'adapter un opérateur de fusion majoritaire afin de traiter la fusion des bases de croyances supposées incommensurables. Pour cela, nous nous basons sur le concept d'échelles compatibles et nous montrons que cet opérateur est équivalent à un critère de Pareto. Enfin nous montrons comment le fait de considérer un ensemble fini d'échelles compatibles permet à cet opérateur de respecter le postulat de majorité.

Mots Clef

Fusion de croyances, fusion majoritaire, fusion utilitariste, bases de croyances ordonnées, incommensurabilité, échelles compatibles, critère de Pareto.

Abstract

Several approaches have been proposed for merging multiple and potentially conflicting pieces of information. However, existing methods use a very strong assumption : the scales used by agents are commensurable.
In this paper, we propose to adapt a well-known merging utilitarist operator to deal with uncommensurable belief bases. Our adaptation is based on the concept of compatible (finite or not) scales. We show that this adapted operator is equivalent to a Pareto Criteria. Moreover, we show that considering a finite set of compatible scales is enought to recover the majority property for this additive-based operator.

Keywords

Belief Merging, utilitarist merging, egalitarist merging, ranked knowledge bases, uncommensurability, compatible scales, Pareto Criteria.

1 Introduction

Le but de la fusion de croyances est, étant donné un ensemble de bases de croyances ordonnées supposées individuellement cohérentes, d'extraire le plus grand ensemble cohérent d'informations de ces bases. Chaque base de croyances ordonnées est un multi-ensemble de formules propositionnelles capturant les croyances d'une source (ou d'un agent). A chaque formule de ces multi-ensembles est associé un poids représentant l'importance associée à cette croyance selon l'agent : plus le poids est élevé, plus cette formule est importante. Les bases de croyances ordonnées sont une représentation compacte de ce qui est habituellement connu sous le nom d'état epistémique [3]. D'un point de vue formel, le processus de fusion permet de calculer une formule propositionnelle représentant le résultat de la fusion.

Plusieurs approches ont été proposées récemment pour la fusion d'informations potentiellement contradictoires [7–9, 12, 13]. Parmi ces méthodes, deux approches de fusion de bases de croyances ordonnées se distinguent : l'approche utilitariste (également appelée fusion majoritaire) et l'approche égalitariste. Les méthodes utilitaristes tentent de minimiser l'insatisfaction globale de l'ensemble d'agents, là où les méthodes égalitaristes visent à minimiser l'insatisfaction individuelle de chaque agent [7].

Cependant, la majeure partie des méthodes de fusion proposées jusqu'à présent supposent implicitement que les échelles dont disposent les différentes bases de croyances à fusionner sont commensurables. Cela signifie que toutes les sources partagent la même signification des rangs associés aux formules représentant les croyances. Cette hypothèse peut cependant se révéler trop forte pour certaines applications. Ainsi, par exemple, lorsque les bases de croyances sont utilisées pour représenter les opinions ou les jugements de différents agents, il semble évident que la notion de poids soit subjective et dépende de la vision relative de chaque agent.

Nous avons récemment proposé une méthode de fusion égalitariste de bases de croyances ordonnées supposées incommensurables [1]. Cette méthode repose sur la notion d'échelle compatible. En effet, même si les poids utilisés par les différents agents sont incommensurables, nous pouvons considérer l'existence d'échelles « globales » permettant de rendre comparables chacune des croyances fournies par les agents. Ces échelles doivent maintenir l'ordre relatif des croyances de chaque agent. Ces échelles n'étant pas uniques, une méthode sceptique basée sur l'ensemble de ces échelles permet de fournir un résultat pour la fusion. Cette méthode est rappelée et développée en section 3.

Dans cet article, nous proposons plus particulièrement d'appliquer cette notion d'échelles compatibles à un opérateur de fusion de type utilitariste. Pour cela, nous adaptons un opérateur « somme » afin d'identifier les interprétations préférées à partir de l'ensemble des échelles compatibles. Nous proposons un critère reposant sur un ordre de type Pareto [11] permettant de déterminer le résultat de la fusion sans avoir à calculer l'ensemble des échelles compatibles. Nous comparons enfin les opérateurs de fusion incommensurable utilitariste et égalitariste ainsi définis en étudiant leurs ensembles de conclusions respectifs. La section 4 présente l'ensemble de ces résultats.

Nous montrons enfin en section 5 que l'opérateur basé sur la somme ne respecte pas le postulat de majorité, même s'il s'appuie sur un opérateur qui le vérifie lorsque les échelles sont commensurables. Nous montrerons comment rendre notre opérateur compatible avec ce postulat, en ne considérant plus l'ensemble de toutes les échelles compatibles possibles, mais en nous limitant à un sous-ensemble fini d'échelles, ceci en les bornant.

2 Rappels sur la fusion de bases de croyances ordonnées et commensurables

Soit $\mathcal{L}$ un langage propositionnel fini. Nous notons Ω l'ensemble des interprétations de $\mathcal{L}$ et ω un élément de cet ensemble. Les formules propositionnelles sont représentées par les lettres grecques φ et ψ. $Mod(\varphi)$ représente l'ensemble des modèles de φ, à savoir $Mod(\varphi) = \{\omega \in \Omega : \omega \models \omega\}$. Le symbole $\top$ représente une tautologie, c'est-à-dire une formule propositionnelle telle que $Mod(\top) = \Omega$.

2.1 Base de croyances ordonnées

Une base de croyances est une représentation compacte des croyances d'un agent (ou source). Cette représentation est utilisée dans de nombreux cadres, tels que la théorie des possibilités [4,5] ou les fonctions ordinales conditionnelles (OCF) [10, 14, 15]. Elle fournit un cadre adapté à la représentation des informations prioritaires ou incertaines.

Le terme croyance désigne les informations incertaines que possède un agent sur le monde. À l'inverse, le terme contrainte d'intégrité désigne les informations totalement certaines et cohérentes, les certitudes de l'agent sur le monde, qui ne peuvent être remises en cause. Les contraintes d'intégrité doivent être présentes dans le résultat de la fusion, les croyances peuvent être acceptées, affaiblies ou ignorées au cours du processus de fusion.

Plus formellement, les bases de croyances ordonnées sont des multi-ensembles de formules propositionnelles ordonnées. C'est-à-dire :

Définition 1 (Base de croyances ordonnées) *Une base de croyances ordonnées B_i est un multi-ensemble de formules propositionnelles pondérées,*

$$B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})),\ j \in \{1, ..., m_i\}\},$$

où $\varphi_{ij} \in \mathcal{L}$, et $R_{B_i}(\varphi_{ij}) \in \mathbb{N}^*$.

$(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))$ signifie que φ_{ij} possède un rang de priorité d'au moins égal à $R_{B_i}(\varphi_{ij})$. Seuls les rangs strictement positifs sont représentés. De plus, nous réservons le symbole de l'infini $+\infty$ aux contraintes d'intégrité. Nous notons B_i^* l'ensemble de formules propositionnelles obtenu à partir de B_i en ignorant les poids.

Intuitivement, les formules associées aux rangs les plus élevés sont les formules préférées de l'agent. Cela nous permet d'induire un ordre de type « $bestoutordering\ >>$ sur les interprétations de Ω : une interprétation ω est préférée à une autre interprétation ω', si et seulement si la croyance la plus certaine falsifiée par ω est moins importante que la croyance la plus certaine falsifiée par ω'. Ainsi, à chaque interprétation est associée le rang de la formule la plus certaine qu'elle falsifie. Les interprétations qui sont modèles de B_i^* ont un rang égal à 0 et sont les préférées. Plus précisément :

Définition 2 (κ-fonctions) *Une fonction de rangement k_B associée à une base de croyances ordonnées B est une fonction qui associe à chaque interprétation $\omega \in \Omega$ un entier $\kappa_B(\omega)$ tel que :*

$$\kappa_B(\omega) = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall(\varphi_{ij},\ R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i,\ \omega \models \varphi_{ij} \\ max\{R_{B_i}(\varphi_{ij}) : \omega \not\models \varphi_{ij}, \\ \qquad (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i\} \\ \qquad\qquad \text{sinon.} \end{cases}$$

L'ordre « best-out ordering » est la base de la sémantique de la logique possibiliste [4] et de la révision par ajustement de Williams [15].

Exemple 3 *Considérons une base de croyances ordonnées $B = \{(\neg a \vee b, 8), (a \vee b, 5), (a, 2)\}$. Le tableau suivant donne la fonction de rangement κ_B associée à B.*

$\omega_i \in \Omega$	a	b	$\kappa_B(\omega_i)$
ω_0	0	0	5
ω_1	0	1	2
ω_2	1	0	8
ω_3	1	1	**0**

Tableau 1 – Un exemple de κ-fonction

L'interprétation ω_3 possède le rang le plus petit. Elle est donc la préférée et représente les croyances actuelles de l'agent.

2.2 Fusion de bases de croyances

Étant données n bases de croyances, la fusion doit permettre d'extraire le plus d'informations cohérentes et pertinentes parmi les croyances de ces n agents. Soit $E = \{B_1, ..., B_n\}$ un multi-ensemble de n bases ordonnées issues de n sources et μ une contrainte d'intégrité que le processus de fusion doit satisfaire (par exemple, la conjonction des contraintes d'intégrité de chaque agent). D'un point de vue formel, ce processus de fusion permet de calculer $\Delta^\mu(E)$, une formule propositionnelle représentant le résultat de la fusion. Différentes méthodes de fusion de E ont été proposées dans la littérature [7–9, 12, 13].
Dans cette section, nous supposons que toutes les sources partagent la même signification des rangs associés aux formules.
Nous devons tout d'abord introduire la notion de *profil* associé à une interprétation ω, noté par $\nu_E(\omega)$, et défini par

$$\nu_E(\omega) = \langle \kappa_{B_1}(\omega), ..., \kappa_{B_n}(\omega) \rangle.$$

Il représente le degré de satisfaction (ou de compatibilité) d'une interprétation ω par rapport au multi-ensemble de bases ordonnées. Afin de calculer $\Delta(E)$, ces degrés de satisfaction sont tout d'abord combinés au moyen d'un opérateur d'agrégation $\circ$ puis les interprétations sont classées selon un ordre strict $\lhd_\circ^E$ défini comme suit : une interprétation ω est préférée à une autre interprétation ω' si l'ordinal associé au profil de ω par $\circ$ est plus petit que l'ordinal associé au profil de ω'. Plus formellement :

Définition 4 (Définition de $\lhd_\circ^E$) *Soit E un multi-ensemble de bases ordonnées. Soit ω et ω' deux interprétations et $\nu_E(\omega)$, $\nu_E(\omega')$ leurs profils associés. Alors :*

$$\omega \lhd_\circ^E \omega' \text{ ssi } \circ(\nu_E(\omega)) < \circ(\nu_E(\omega')),$$

avec $\circ$ un opérateur d'agrégation tel que

$$\circ(\nu_E(\omega')) = \circ(\kappa_{B_1}(\omega), ..., \kappa_{B_n}(\omega))$$

Dans cette section, nous nous focaliserons sur deux exemples d'opérateurs : un opérateur de type égalitariste qui est le maximum (noté max) et un autre opérateur de type utilitariste, basé sur l'opérateur somme (noté Σ).
Le résultat de la fusion $\Delta_\circ^\mu(E)$ est une formule propositionnelle dont les modèles sont les interprétations qui sont également modèles de μ et qui sont minimaux par rapport à $\lhd_\circ^E$. Plus formellement :

Définition 5 (Résultat de la fusion) *Soit $E = \{B_1, ..., B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées et μ une contrainte d'intégrité. Le résultat de la fusion est une formule propositionnelle, notée $\Delta_\mu^\circ(E)$, est défini par :*
$Mod(\Delta_\circ^\mu(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \lhd_\circ^E \omega\}$

Remarquons qu'en l'absence de contrainte pour la fusion, le processus considérera l'ensemble des interprétation de Ω ce qui est équivalent à considérer une contrainte $\mu \equiv \top$. Illustrons ces définitions par un exemple.

Exemple 6 *Soit $E = \{B_1, B_2\}$ tel que $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. Le profil associé à chaque interprétation est donné par le Tableau 2. Nous utiliserons pour cette fusion l'opérateur de fusion Max, puis l'opérateur de fusion Σ. Le résultat de la fusion Max, en considérant $\mu \equiv a$ est tel que :*

$$Mod(\Delta_{max}^\mu(E)) = \{\omega_2\}$$

Le résultat de la fusion Σ, en considérant $\mu \equiv a$ est tel que :

$$Mod(\Delta_{max}^\mu(E)) = \{\omega_2\}$$

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$	max	Σ
ω_0	0	0	6	3	⟨6,3⟩	6	9
ω_1	0	1	0	3	⟨0,3⟩	3	3
ω_2	1	0	2	0	⟨2,0⟩	**2**	**2**
ω_3	1	1	2	3	⟨2,3⟩	3	5

Tableau 2 – Profils associés avec les interprétations

Remarquons que pour cet exemple de fusion de bases commensurables, les opérateurs d'agrégation Σ et Max déduisent le même ensemble de conclusions, ce qui n'est pas le cas généralement, où les ensembles de conclusions peuvent même être disjoints.

3 Fusion égalitariste de bases de croyances incommensurables

Nous avons supposé précédemment que toutes les sources partagent la même signification des rangs associés aux formules. Cette hypothèse peut cependant se révéler trop forte pour certaines applications. Dans ce qui suit, nous abandonnons l'hypothèse de commensurabilité, et nous considérons que les agents ne disposent plus d'une échelle de référence commune.

3.1 Fusion égalitariste basée sur les échelles compatibles

Nous avons proposé dans [1] une méthode naturelle pour fusionner des bases de croyances possédant des échelles de référence incommensurables. Cette méthode repose sur la notion d'échelle compatible. Une échelle $\mathcal{S}$ affecte de nouveaux rangs aux croyances de chaque base du multi-ensemble E. Cette échelle est dite compatible si elle préserve l'ordre relatif original induits par les croyances de chaque base.

Définition 7 (Échelle compatible) *Soit* $E = \{B_1, ..., B_n\}$ *où* $B_i = \{(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij}))\}$. *Alors une échelle* $\mathcal{S}$*, définie par :*

$$\begin{array}{llll} \mathcal{S} : & B_1 \sqcup ... \sqcup B_n & \rightarrow & \mathbb{L} \subseteq \mathbb{N} \\ & (\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) & \mapsto & \mathcal{S}(\varphi_{ij}) \end{array}$$

(où $\sqcup$ *représente l'union des multi-ensembles), est dite compatible avec* $R_{B_1}, ..., R_{B_n}$ *si et seulement si :*

$$\forall B_i \in E,\ \forall(\varphi_{ij}, R_{B_i}(\varphi_{ij})) \in B_i,\ \forall(\varphi_{ij'}, R_{B_i}(\varphi_{ij'})) \in B_i,$$

$$R_{B_i}(\varphi_{ij}) \leq R_{B_i}(\varphi_{ij'}) \text{ ssi } \mathcal{S}(\varphi_{ij}) \leq \mathcal{S}(\varphi_{ij'}).$$

Clairement, il existe de nombreuses échelles compatibles possibles pour un ensemble E donné. Nous illustrons ce concept avec l'exemple suivant :

Exemple 8 (suite) *Considérons de nouveau* $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ *et* $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. *Le tableau 3 donne trois échelles :* $\mathcal{S}_1$, $\mathcal{S}_2$ *et* $\mathcal{S}_3$.

	φ_{ij}	$R_{B_i}(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_1(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_2(\varphi_{ij})$	$\mathcal{S}_3(\varphi_{ij})$
B_1	$a \vee b$	6	3	3	5
	$\neg a$	2	2	4	1
B_2	$a \wedge \neg b$	3	4	2	7

Tableau 3 – exemples d'échelles

Les échelles $\mathcal{S}_1$ *et* $\mathcal{S}_3$ *sont compatibles, parce qu'elles préservent l'ordre induit par chaque base ordonnée. À l'inverse, l'échelle* $\mathcal{S}_2$ *n'est pas une échelle compatible : elle inverse la priorité entre les croyances de* B_1.

L'ensemble des échelles compatibles avec E est noté $\mathbb{S}_E$. Étant donnée une échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, nous notons $B_i^{\mathcal{S}}$ la base ordonnée obtenue à partir de B_i en remplaçant chaque paire $(\phi_{ij}, R_{B_i}(\phi_{ij}))$ par $(\phi_{ij}, \mathcal{S}(\phi_{ij}))$. De la même manière, nous notons $E^{\mathcal{S}}$ le multi-ensemble obtenu à partir de E en remplaçant chaque B_i de E par $B_i^{\mathcal{S}}$.
Nous optons pour la stratégie sceptique suivante : une interprétation ω est dite préférée à une interprétation ω' si, pour chaque échelle compatible $\mathcal{S}$, ω est préférée à ω' au sens de la Définition 4. En appliquant cette définition à l'opérateur de fusion égalitariste max, nous obtenons l'ordre partiel suivant :

Définition 9 (Définition de $\blacktriangleleft_{max}^{E}$) *Soit* E *un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées, et* $\mathbb{S}_E$ *l'ensemble de toutes les échelles compatibles associées à* E. *Soient* ω, ω' *deux interprétations. Alors :*

$$\omega \blacktriangleleft_{max}^{E} \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E,\ \omega \lhd_{max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$$

où $\lhd_{max}^{E^{\mathcal{S}}}$ *est le résultat de la fusion en appliquant la Définition 4 sur* $E^{\mathcal{S}}$.

De même que dans le cadre de la fusion de bases commensurables, les modèles de $\blacktriangle_{max}^{\mu}(E)$ sont ceux qui sont modèles de μ et minimaux pour $\blacktriangleleft_{max}^{E}$:

$$Mod(\blacktriangle_{max}^{\mu}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) :\ \nexists \omega' \in Mod(\mu),\ \omega' \blacktriangleleft_{max}^{E} \omega\}$$

Illustrons la fusion basée sur les échelles compatibles au moyen de l'exemple suivant :

Exemple 10 (suite) *Supposons que* $\mu \equiv \top$. *Considérons de nouveau* $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ *et* $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. *Le Tableau 4 présente cinq échelles compatibles avec* E*, et le Tableau 5 fournit les profils des interprétations associés à ces échelles.*

	φ_{ij}	R_{B_i}	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$
B_1	$a \vee b$	6	2	2	3	2	3
	$\neg a$	2	1	1	1	1	2
B_2	$a \wedge \neg b$	3	3	2	2	1	1

Tableau 4 – Echelles compatibles représentatives

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_3}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_4}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_5}}(\omega)$
ω_0	$\langle 2, 3\rangle$	$\langle 2, 2\rangle$	$\langle 3, 2\rangle$	$\langle 2, 1\rangle$	$\langle 3, 1\rangle$
ω_1	$\langle 0, 3\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle 0, 2\rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1}\rangle$
ω_2	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle 2, 0\rangle$
ω_3	$\langle 1, 3\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle 1, 2\rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{1}\rangle$	$\langle 2, 1\rangle$

Tableau 5 – Profils des échelles compatibles

En fait, les cinq échelles compatibles données par le Tableau 4 sont suffisantes pour caractériser le résultat de la fusion. C'est-à-dire que pour chaque échelle compatible $\mathcal{S}$*, il existe une échelle compatible* $\mathcal{S}_i \in \{1, ..., 5\}$ *donnée dans le Tableau 4, telle que* $\omega \lhd_{max}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$ *ssi* $\omega \lhd_{max}^{E^{\mathcal{S}_i}} \omega'$*, pour tout* ω *et* ω'.
Les éléments mis en gras dans les Tableaux 5,représentent les modèles de $\Delta_{max}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_i})$ *pour une échelle* $\mathcal{S}_i$ *donnée. Par exemple, les interprétations* ω_1, ω_2 *et* ω_3 *sont modèles de* $\Delta_{max}^{\mu}(E^{\mathcal{S}_4})$ *pour l'échelle compatible* $\mathcal{S}_4$ *du Tableau 5. Finalement, l'ordre partiel strict entre les interprétations est seulement défini par* $\omega_2 \blacktriangleleft_{max}^{E} \omega_0$. *Ainsi, les modèles de* $\blacktriangle_{max}^{\mu}(E)$ *sont* $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$*, et* $\blacktriangle_{max}^{\mu}(E) \equiv a \vee b$. *Notons que ce résultat diffère de celui obtenu pour* $\blacktriangle_{max}^{\mu}(E)$ *dans l'exemple 6*

3.2 Caractérisation du résultat de la fusion égalitariste

Nous avons introduit dans [1] une manière d'identifier les interprétations résultante de la fusion sans être obligé de calculer entièrement $\mathbb{S}_E$, en utilisant la variante de l'ordre de Pareto stricte suivante :

Définition 11 (Définition de $\lhd_{0-Pareto}^{E}$) *Soit* $E = \{B_1, ..., B_n\}$. ω *est 0-Pareto-préférée à* ω'*, noté* $\omega \lhd_{0-Pareto}^{E} \omega'$*, ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

– *(i)* $\exists i \in \{1,...,n\},\ \kappa_{B_i}(\omega') \neq 0$,
– *(ii)* $\forall i \in \{1,..,n\},\ \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega') = 0,\ ou\ \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$.

La condition (i) indique qu'il existe au moins une base falsifiée par ω'. Cela signifie qu'une interprétation qui vérifie l'ensemble des bases fera toujours partie du résultat de la fusion. La condition (ii) stipule que l'on ne compare ω et ω' que selon les bases où ni ω ni ω' ne sont modèles et que pour les autres, ω et ω' sont comparés à l'aide d'un ordre strict.
Illustrons la Définition 11 par l'exemple suivant :

Exemple 12 (suite) *Considérons à nouveau $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. Le Tableau 6 présente le profil de chaque interprétation de Ω.*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
ω_0	0	0	6	3	$\langle 6, 3\rangle$
ω_1	0	1	0	3	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{3}\rangle$
ω_2	1	0	2	0	$\langle \mathbf{2}, \mathbf{0}\rangle$
ω_3	1	1	2	3	$\langle \mathbf{2}, \mathbf{3}\rangle$

Tableau 6 – Profils associés au interprétations

D'après le Tableau 6 nous avons ω_2 strictement préféré à ω_0 en utilisant $\lhd^E_{0-Pareto}$, puisque pour chaque base de croyances, le rang associé avec ω_2 est strictement inférieur au rang associé avec ω_0.

Nous avons enfin donné dans [1] le résultat suivant, montrant l'équivalence entre l'ordre s'appuyant sur le critère ainsi défini et l'ordre basé sur les échelles compatibles à partir de l'opérateur de fusion égalitariste :

Proposition 13 (Équivalence entre $\blacktriangleleft^E_{Max}$ et $\lhd^E_{0-Pareto}$) *Soit E un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées, $\blacktriangleleft^E_{Max}$ et $\lhd^E_{0-Pareto}$ deux ordres définis respectivement par la Définition 9 et la Définition 11. Alors :*

$$\forall \omega,\ \omega' \in \Omega,\ \omega \blacktriangleleft^E_{Max} \omega' \ \text{ ssi } \ \omega \lhd^E_{0-Pareto} \omega'.$$

Ainsi, cette équivalence nous a permis de fusionner des bases ordonnées incommensurables, sans calculer l'ensemble des échelles compatibles, de la manière suivante. Les ordres étant équivalents, les minimaux le sont également :
$Mod(\Delta^\mu_{0-Pareto}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu), \omega' \lhd^E_{0-Pareto} \omega\}$, et donc

$$Mod(\Delta^\mu_{0-Pareto}(E)) = Mod(\blacktriangle^\mu_{Max}(E))$$

Exemple 14 (suite) *Considérons à nouveau $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. D'après le Tableau 6, ω_1, ω_2 et ω_3 sont modèles de $\Delta^\mu_{0-Pareto}(E)$ parce qu'ils sont minimaux pour l'ordre $\lhd^E_{0-Pareto}$ donné par la Définition 11.*
Ainsi, $\Delta^\mu_{0-Pareto}(E) \equiv a \vee b$ pour $\mu \equiv \top$. Ce résultat est exactement le même que celui donné dans l'Exemple 10.

4 Fusion utilitariste de bases de croyances incommensurables

Nous avons présenté dans la section précédente une manière intuitive de fusionner des bases de croyances incommensurables au moyen d'un opérateur de fusion égalitariste. Nous décrivons maintenant une façon simple de l'étendre à un opérateur de fusion utilitariste de type $somme$, ainsi qu'une manière de caractériser le résultat de la fusion par un ordre de Pareto sur les interprétations.

4.1 Utilitarisme et échelles compatibles

À l'inverse des opérateurs de fusion égalitaristes (par exemple l'opérateur max) qui tentent de minimiser l'insatisfaction individuelle de chaque agent, les opérateurs de fusion utilitaristes tentent de minimiser l'insatisfaction globale. Ce type d'opérateur est particulièrement approprié si les sources (ou agents) sont supposées indépendantes. En effet, ces opérateurs sont dépendants de la majorité, c'est-à-dire que la répétition d'une même partie d'information peut influer sur le résultat de la fusion.
De même que précédemment, nous supposons que les agents ne partagent pas la même signification des rangs associés aux formules, et abandonnons ainsi l'hypothèse de commensurabilité. À nouveau, nous traitons le problème de l'incommensurabilité au moyen des échelles compatibles telles qu'elles sont définies précédemment. Pour cela, nous adaptons le critère de comparaison entre interprétations donné par la Définition 4 à l'opérateur d'agrégation utilitariste Σ :

Définition 15 (Définition de $\lhd^E_\Sigma$) *Soit E un multi-ensemble de bases ordonnées. Soit ω et ω' deux interprétations et $\nu_E(\omega)$, $\nu_E(\omega')$ leurs profils associés. Alors :*

$$\omega \lhd^E_\Sigma \omega' \text{ ssi } \Sigma(\nu_E(\omega)) < \Sigma(\nu_E(\omega')),$$

où

$$\Sigma(\nu_E(\omega)) = \Sigma_{i \in \{1,...,n\}}\{\kappa_{B_i}(\omega)\}.$$

Nous adaptons maintenant la stratégie sceptique présentée dans la section précédente de la manière suivante : une interprétation ω est préférée à une interprétation ω' si, pour chaque échelle compatible $\mathcal{S}$, ω est préférée à ω' au sens du critère de comparaison défini précédemment.

Définition 16 (Définition de $\blacktriangleleft^E_\Sigma$) *Soit E un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées, et $\mathbb{S}_E$ l'ensemble de toutes les échelles compatibles associées à E. Soient ω, ω' deux interprétations. Alors :*

$$\omega \blacktriangleleft^E_\Sigma \omega' \ \text{ ssi } \ \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E,\ \omega \lhd^{E^{\mathcal{S}}}_\Sigma \omega'$$

D'une manière naturelle, les modèles de $\blacktriangle^\mu_\Sigma(E)$ sont ceux qui sont modèles de μ et minimaux pour $\blacktriangleleft^E_\Sigma$:

$$Mod(\blacktriangle^\mu_\Sigma(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu),\ \omega' \blacktriangleleft^E_\Sigma \omega\}$$

Exemple 17 (suite) *Supposons que $\mu \equiv \top$. Considérons de nouveau $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. Le Tableau 7 présente cinq échelles compatibles avec E parmi toutes celles possibles, et le Tableau 8 fournit les profils des interprétations associés à ces échelles.*

	φ_{ij}	R_{B_i}	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$	$\mathcal{S}_5$
B_1	$a \vee b$	6	9	4	4	16	9
	$\neg a$	2	5	1	2	13	7
B_2	$a \wedge \neg b$	3	13	7	3	13	4

Tableau 7 – Quelques échelles compatibles

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_3}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_4}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_5}}(\omega)$
ω_0	$\langle 9, 13\rangle$	$\langle 4, 7\rangle$	$\langle 4, 3\rangle$	$\langle 16, 13\rangle$	$\langle 9, 4\rangle$
ω_1	$\langle 0, 13\rangle$	$\langle 0, 7\rangle$	$\langle 0, 3\rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{13}\rangle$	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{4}\rangle$
ω_2	$\langle \mathbf{5}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{2}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{13}, \mathbf{0}\rangle$	$\langle 7, 0\rangle$
ω_3	$\langle 5, 13\rangle$	$\langle 1, 7\rangle$	$\langle 2, 3\rangle$	$\langle 13, 13\rangle$	$\langle 7, 4\rangle$

Tableau 8 – Profils des échelles compatibles

Les éléments mis en gras dans le Tableau 8 représentent les modèles de $\Delta^{\mu}_{\Sigma}(E^{\mathcal{S}_i})$ pour une échelle $\mathcal{S}_i$ donnée. Par exemple, les interprétations ω_1, et ω_2 sont modèles de $\Delta^{\mu}_{\Sigma}(E^{\mathcal{S}_4})$ pour l'échelle compatible $\mathcal{S}_4$ du Tableau 8. Contrairement à l'approche égalitariste, il faut ici considérer toutes les échelles compatibles possibles. Néanmoins, sur cet exemple, il peut être montré qu'il n'existe aucune échelle compatible où ω_0 ou ω_3 seraient préférées.
Pour cet opérateur, l'ordre partiel strict entre les interprétations est défini par $\omega_2 \blacktriangleleft^{E}_{\Sigma} \omega_3$, $\omega_1 \blacktriangleleft^{E}_{\Sigma} \omega_3$ et $\omega_3 \blacktriangleleft^{E}_{\Sigma} \omega_0$, les interprétations ω_1 et ω_2 étant incomparables. Ainsi, les modèles de $\blacktriangle^{\mu}_{\Sigma}(E)$ sont ω_1 et ω_2.

4.2 Caractérisation du résultat de la fusion utilitariste

De même que pour la fusion égalitariste de bases de croyances dont les échelles sont supposées incommensurables, nous fournissons dans cette partie un critère permettant d'identifier les interprétations de Ω préférée pour $\blacktriangle^{\mu}_{\Sigma}$. Ce critère se révèle être simplement le critère de Pareto :

Définition 18 (Définition de $\triangleleft_{Pareto}$) *Soit $E = \{B_1, ..., B_n\}$. ω est Pareto-préférée à ω', noté $\omega \triangleleft_{Pareto} \omega'$, ssi les deux conditions suivantes sont satisfaites :*
- *(i) $\forall j \in \{1, .., n\},\ \kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$;*
- *(ii) $\exists i \in \{1, ..., n\},\ \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$.*

Intuitivement, la première condition signifie qu'aucune des bases n'exprime de préférence stricte pour la seconde interprétation, tandis que la seconde signifie qu'au moins une des bases exprime une préférence stricte pour la première interprétation.
Illustrons la Définition 18 par l'exemple suivant :

Exemple 19 (suite) *Considérons à nouveau $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. Le Tableau 9 présente le profil de chaque interprétation de Ω.*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
ω_0	0	0	6	3	$\langle 6, 3\rangle$
ω_1	0	1	0	3	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{3}\rangle$
ω_2	1	0	2	0	$\langle \mathbf{2}, \mathbf{0}\rangle$
ω_3	1	1	2	3	$\langle 2, 3\rangle$

Tableau 9 – Profils associés au interprétations

D'après le Tableau 9 nous avons ω_2 strictement préféré à ω_3 en utilisant $\triangleleft^{E}_{Pareto}$. En effet, pour chaque base de croyances, le rang associé avec ω_2 est au moins inférieur au rang associé avec ω_3, et B_2 exprime une préférence stricte pour ω_2. De la même manière, nous avons ω_1 strictement préférée à ω_3 et ω_3 strictement préférée à ω_0.

Ainsi, l'ordre énoncé de cette manière nous permet d'introduire un critère de caractérisation du résultat de la fusion. Ce critère repose sur l'équivalence entre le critère de Pareto et la fusion utilitariste basée sur les compatibles :

Proposition 20 (Équivalence entre $\blacktriangleleft^{E}_{\Sigma}$ et $\triangleleft^{E}_{Pareto}$) *Soit E un multi ensemble de bases de croyances ordonnées, $\blacktriangleleft^{E}_{\Sigma}$ et $\triangleleft^{E}_{Pareto}$ deux ordres partiels définis respectivement par la Définition 26 et la Définition 18. Alors :*

$$\forall \omega,\ \omega' \in \Omega,\ \blacktriangleleft^{E}_{\Sigma} \omega' \text{ ssi } \omega \triangleleft^{E}_{Pareto} \omega'$$

Cette équivalence entre les deux relations d'ordre ainsi définies nous permet de calculer le résultat de la fusion utilitariste en cas d'incommensurabilité sans calculer l'ensemble des échelles compatibles, potentiellement infini :
$Mod(\Delta^{\mu}_{Pareto}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu),\ \omega' \triangleleft^{E}_{Pareto} \omega\}$.

Preuve 21 (Preuve de l'équivalence entre $\blacktriangleleft^{E}_{\Sigma}$ et $\triangleleft^{E}_{Pareto}$) *Soit ω et ω' deux interprétations de Ω.*

Montrons d'abord que $\omega \triangleleft^{E}_{Pareto} \omega' \Rightarrow \forall \omega,\ \omega' \in \Omega,\ \omega \blacktriangleleft^{E}_{\Sigma} \omega'$.
Pour cela, supposons que ω soit préféré à ω' selon notre opérateur basé sur le critère de Pareto précédemment défini. Nous savons , dans un premier temps, que pour chaque base B_i, le degré d'insatisfaction exprimé pour ω est inférieur ou égal à celui exprimé pour ω'.
C'est-à-dire $\forall j \in \{1, .., n\},\ \kappa_{B_j}(\omega) \leq \kappa_{B_j}(\omega')$.
Puisque les échelle compatibles préserve l'ordre des croyances de chaque agent, nous obtenons que quelque soit l'échelle compatible, pour chaque base B_i, le degré d'insatisfaction exprimé pour ω est inférieur ou égal à celui exprimé pour ω'. Nous obtenons ainsi
$\forall \mathcal{S}_i \in \mathbb{S}_E \forall j \in \{1, .., n\},\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega) \leq \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega')$.
Ainsi, pour chaque échelle compatible $\mathcal{S}_\rangle \in \mathbb{S}_E$, la somme des éléments du profile de ω est inférieure ou égale à la somme des éléments de ω'. Ce qui nous donne $\forall \mathcal{S}_i \in$

$\mathbb{S}_E\ \Sigma_{j\in\{1,..,n\}}(\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega)) \leq \Sigma_{j\in\{1,..,n\}}(\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega'))$.

De part la définition de notre opérateur de fusion basé sur le critère de Pareto, nous savons également qu'il existe une base exprimant une préférence forte pour ω vis-à-vis de ω'. C'est-à-dire $\exists i \in \{1,...,n\},\ \kappa_{B_i}(\omega) < \kappa_{B_i}(\omega')$.
Puisque les échelles compatibles préservent également cette notion, nous obtenons ainsi que pour chaque échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, la somme des éléments du profile de ω est strictement inférieure à la somme des éléments de ω'. Nous obtenons $\forall \mathcal{S}_i \in \mathbb{S}_E\ \Sigma_{j\in\{1,..,n\}}(\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega)) < \Sigma_{j\in\{1,..,n\}}(\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega'))$.
Cela revient à dire que ω est préféré à ω' au sens de $\blacktriangleleft_{\Sigma}^{E}$.

Montrons maintenant que $\forall \omega,\ \omega' \in \Omega,\ \omega \blacktriangleleft_{\Sigma}^{E} \omega' \Rightarrow \omega \triangleleft_{Pareto}^{E} \omega'$.
Pour cela, procédons par contraposition et supposons que ω n'est pas préféré à ω' selon notre opérateur basé sur le critère de Pareto précédemment défini. A ce point, deux cas sont envisageables :

- *soit il existe une base $B_i \in E$ qui exprime une préférence pour ω' vis-à-vis de ω. C'est-à-dire $\exists i \in \{1,..,n\},\ \kappa_{B_i}(\omega) > \kappa_{B_i}(\omega')$. Dans ce cas, puisque les échelles compatibles préservent l'ordre induit par chaque base de croyances B_i, nous savons que pour toute échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, ω' sera préféré a ω selon cette même base B_i. Nous obtenons ainsi $\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E \exists i \in \{1,..,n\},\ \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega) > \kappa_{B_i^{\mathcal{S}}}(\omega')$.*
  En particulier, il est alors possible de construire une échelle compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ où le degré d'insatisfaction associé à ω par B_i sera supérieur à la somme des éléments du profile de ω'.
  Construisons maintenant cette échelle compatible $\mathcal{S}$ telle que $\omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$ n'est pas valide. Soit $\mathcal{S}_i$ une échelle compatible et M un très grand nombre. M doit être tel que $M > \Sigma_{k=1}^{n}\Sigma_{\varphi_l\in B_k^*}\mathcal{S}(\varphi_l)$
  Définissons $\mathcal{S}$ comme suit :
  – $\forall m \neq i,\ \forall \varphi \in B_m,\ \mathcal{S}(\varphi) = \mathcal{S}_i(\varphi)$
  – $\forall \varphi \in B_i,\ \mathcal{S}(\varphi) = M^{\mathcal{R}_{B_i}(\varphi)}$
  On peut facilement montrer que d'une part $\mathcal{S}$ est compatible, et d'autre part $\omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'$ n'est pas valide.
  De part l'existence de cette compatible, ω ne peut pas être préféré à ω' au sens de $\blacktriangleleft_{\Sigma}^{E}$;
- *soit encore aucune base n'exprime de préférence stricte pour ω ou ω'. Dans ce cas, $\forall B_i \in E,\ \kappa_{B_i}(\omega) = \kappa_{B_i}(\omega')$. Dans ce cas, puisque les échelles compatible préservent l'ordre induit par chaque base de croyances B_i, nous obtenons $\forall \mathcal{S}_i \in \mathbb{S}_E,\ \forall B_j \in E,\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega) = \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega')$.*
  Ainsi, pour toute compatible $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$, la somme des éléments du profil de ω est égale à la somme des éléments du profil de ω'. C'est à dire $\forall \mathcal{S}_i \in \mathbb{S}_E\ \Sigma_{j\in\{1,..,n\}}(\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega)) = \Sigma_{j\in\{1,..,n\}}(\ \kappa_{B_j^{\mathcal{S}_i}}(\omega'))$.
  Pour cela, ω ne peut pas être préféré à ω' au sens de $\blacktriangleleft_{\Sigma}^{E}$.

Illustrons ces propos par un exemple :

Exemple 22 (suite) *Considérons à nouveau $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. D'après le Tableau 9, ω_1, et ω_2 sont modèles de $\Delta^{\mu}_{Pareto}(E)$ parce qu'ils sont minimaux pour l'ordre $\triangleleft_{Pareto}$ donné par la Définition 18. Ainsi, $Mod(\Delta^{\mu}_{Pareto}(E)) = \{\omega_1,\ \omega_2\}$ pour $\mu = \top$. Ce résultat est le même que celui donné dans l'Exemple 17.*

Nous pouvons remarquer que toute interprétation qui est $0 - Pareto$-préférée est également $Pareto$-préférée. L'inverse est en revanche faux. Par exemple $\langle 0,1,2\rangle \triangleleft_{Pareto} \langle 0,1,3\rangle$, mais $\langle 0,1,2\rangle \not\triangleleft_{0-Pareto} \langle 0,1,3\rangle$. Ce qui veut dire qu'un élément minimal pour le critère de Pareto l'est aussi pour le critère 0-Pareto.

Proposition 23 (Comparaison des deux opérateurs) *Soit E un multi ensemble de bases de croyances ordonnées, $\blacktriangle^{\mu}_{\Sigma}(E)$ et $\blacktriangle^{\mu}_{max}(E)$ le résultat de la fusion induits par les ordres décrits par les définitions 9 et 26. Alors :*

$$\blacktriangle^{\mu}_{\Sigma}(E) \models \blacktriangle^{\mu}_{Max}(E).$$

Plus simplement, l'ensemble des conclusions qui peuvent être déduites à partir de $\blacktriangleleft^{E}_{max}$ est contenu dans l'ensemble des conclusions qui peuvent être déduite de $\blacktriangleleft^{E}_{\Sigma}$: $\blacktriangle^{\mu}_{\Sigma}$ est plus discriminant que $\blacktriangle^{\mu}_{max}$.
Cette propriété n'est pas vérifiée si l'on utilise les opérateurs max et Σ dans le cadre de la fusion avec des échelles commensurables. En effet, dans ce cas, les conclusions obtenues par ces deux opérateurs peuvent être totalement disjointes.

5 Incommensurabilité, majorité et échelles finies

5.1 Postulat de majorité

De nombreux postulats de rationalité ont été proposés dans la littérature pour les opérateurs de fusion [6, 7]. Parmi ceux-ci, le postulat de majorité caractérise particulièrement les opérateurs de fusion utilitaristes. Celui-ci capture la propriété suivante : si une même base de croyances est répétée en nombre suffisant de fois parmi les bases de croyances à fusionner, alors cette base sera déduite du résultat de la fusion.
Plus formellement, soit $E = \{B_1,\ ....,\ B_n\}$ un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées, B_i une base de croyances ordonnées et $\circ$ un opérateur de fusion. Cet opérateur est un opérateur de fusion majoritaire s'il vérifie la propriété suivante :

$$\textbf{(MAJ)}\quad \exists m \in \mathbb{N} : \Delta_{\circ}(E \sqcup B_i^m) \models B_i.$$

Avec $B_i^m = \underbrace{\{B_i\} \sqcup ... \sqcup \{B_i\}}_{m fois}$ et $\sqcup$ l'union pour les multi-ensembles.
Plus nombreux sont les agents en accord sur un même ensemble de croyances, plus cet ensemble de croyances doit

figurer parmi les conséquences déduites par un opérateur de fusion qui vise à minimiser l'insatisfaction globale.
Dans le cadre commensurable, l'opérateur Σ vérifie ce postulat et est donc utilitariste. Cependant, il apparaît que l'opérateur pour la fusion de bases incommensurables basé sur la somme défini précédemment ne respecte pas ce postulat de majorité et n'est donc pas utilitariste, comme le montre le contre-exemple suivant.

Exemple 24 *Reconsidérons l'exemple précédent, tel que tel que $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. Soit $E = \{B_1\} \sqcup B_2^{100}$*

	a	b	$\kappa_{B_1}(\omega)$	$\kappa_{B_2}(\omega)$	$\nu_E(\omega)$
ω_0	0	0	6	3	$< 6, 3, 3, 3, 3, ..., 3 >$
ω_1	0	1	0	3	$< 0, 3, 3, 3, 3, ..., 3 >$
ω_2	1	0	2	0	$< 2, 0, 0, 0, 0, ..., 0 >$
ω_3	1	1	2	3	$< 2, 3, 3, 3, 3, ..., 3 >$

Tableau 10 – Profils associés au interprétations

La fusion étant équivalente à une Pareto-comparaison, l'ajout massif de B_2 (et donc de l'interprétation ω_2) ne permettra jamais de contrebalancer ω_1, autre interprétation préférée par le critère de Pareto, sur la première composante du profil.

En fait, le critère de Pareto permet de distinguer deux états du monde selon le degré de satisfaction de chaque agent : une interprétation est préférée à une autre si il est possible d'augmenter la satisfaction de certains individus sans réduire celle des autres. En ce sens, il est incompatible avec la notion de majorité, qui préfère tenir compte de la voix du plus grand nombre au détriment de certaines minorités.

5.2 Fusion utilitariste et échelles finies

Le but de cette section est de modifier notre opérateur de fusion basé sur la somme afin de respecter le postulat de majorité en ne considérant qu'un ensemble fini d'échelles compatibles. L'ensemble des échelles compatibles considérées doit en effet être réduit, afin d'éviter de prendre en compte celles qui rendent les croyances d'un unique agent arbitrairement importante. Nous définissons pour cela les restrictions sur les échelles compatibles.

Définition 25 (restrictions sur les échelles compatibles) *Soit $E = \{B_1, ..., B_n\}$, p un entier positif et $\mathbb{S}_E$ l'ensemble des échelles compatibles avec E. Alors, $\mathbb{S}_E^p$ est l'ensemble des échelles compatibles $\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E$ tel que :*

$$\forall B_i \in E,\ \forall \varphi \in B_i :\ p_0 \leq \mathcal{S}(\varphi) \leq p.$$

En d'autres termes, $\mathbb{S}_E^p$ ne considère que les échelles compatibles dont le rang maximal est au plus p. Nous pouvons remarquer que le plus petit p_0 possible pour un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées E est tel que :

$$p_0 = max\{|B_i| : B_i \in E\}.$$

où $|B_i|$ représente le nombre de poids (ou de rangs) différents contenus dans B_i.
Les restrictions sur les échelles compatibles permettent de définir une restriction sur l'ordre des interprétations.

Définition 26 (Définition de $\blacktriangleleft_{\Sigma-p}^E$) *Soit E un multi-ensemble de bases de croyances ordonnées, et $\mathbb{S}_E$ l'ensemble de toutes les échelles compatibles associées à E. Soient ω, ω' deux interprétations. Alors :*

$$\omega \blacktriangleleft_{\Sigma-p}^E \omega' \text{ ssi } \forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}_E^p,\ \omega \triangleleft_{\Sigma}^{E^{\mathcal{S}}} \omega'.$$

Les modèles du résultat de la fusion sont l'ensemble des éléments préférés pour ce nouvel ordre : $Mod(\blacktriangle_{\Sigma-p}^{\mu}(E)) = \{\omega \in Mod(\mu) : \nexists \omega' \in Mod(\mu),\ \omega' \blacktriangleleft_{\Sigma-p}^E \omega\}$.
L'ordre induit par les opérateur définis à partir des échelles restreintes n'est plus équivalent à l'ordre de Pareto. De plus, la restriction ne s'applique qu'aux poids des échelles compatibles et non pas à la somme de ces poids qui peut évidemment dépasser p.
Illustrons ces propos par un exemple :

Exemple 27 (suite) *Supposons que $\mu \equiv \top$. Considérons de nouveau $B_1 = \{(a \vee b, 6), (\neg a, 2)\}$ et $B_2 = \{(a \wedge \neg b, 3)\}$. Et calculons $\blacktriangle_{\Sigma-2}^{\mu}$. Les échelles compatibles ne pourrons plus prendre leurs valeurs que dans $\{1, 2\}$. Ce qui limite le nombre d'échelles compatibles à 2, résumées dans le tableau 11.*

	φ_{ij}	R_{B_i}	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$
B_1	$a \vee b$	6	1	1
	$\neg a$	2	2	2
B_2	$a \wedge \neg b$	3	1	2

Tableau 11 – Échelles compatibles

Si l'on considère chacun des profils associés, on s'aperçoit que ω_2 n'arrive pas à dominer ω_1 dans $\mathcal{S}_1$, comme montré par le tableau 12.

	$\nu_{E^{\mathcal{S}_1}}(\omega)$	$\nu_{E^{\mathcal{S}_2}}(\omega)$
ω_0	$\langle 2, 1 \rangle$	$\langle 2, 2 \rangle$
ω_1	$\langle \mathbf{0}, \mathbf{1} \rangle$	$\langle 0, 2 \rangle$
ω_2	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$	$\langle \mathbf{1}, \mathbf{0} \rangle$
ω_3	$\langle 1, 1 \rangle$	$\langle 1, 2 \rangle$

Tableau 12 – Profils des échelles compatibles

Considérons maintenant $E = \{B_1, B_2, B_2\}$. Il existe désormais 5 échelles compatibles (cf. tableau 13).
Finalement, le tableau 14 montre que ω_2 est toujours l'interprétation préférée, quelque soit l'échelle compatible considérée. En effet, comme ω_1 falsifie B_2 au moins 2 fois, il aura toujours un score au moins égal à 2.

	φ_{ij}	R_{B_i}	$\mathcal{S}_1$	$\mathcal{S}_2$	$\mathcal{S}_3$	$\mathcal{S}_4$
B_1	$a \vee b$	6	2	2	2	2
	$\neg a$	2	1	1	1	1
B_2	$a \wedge \neg b$	3	1	1	2	2
B_2	$a \wedge \neg b$	3	1	2	1	2

Tableau 13 – Échelles compatibles

	$\nu_E s_1(\omega)$	$\nu_E s_2(\omega)$	$\nu_E s_3(\omega)$	$\nu_E s_4(\omega)$
ω_0	$\langle 2,1,1\rangle$	$\langle 2,1,2\rangle$	$\langle 2,2,1\rangle$	$\langle 2,2,2\rangle$
ω_1	$\langle 0,1,1\rangle$	$\langle 0,1,2\rangle$	$\langle 0,2,1\rangle$	$\langle 0,2,2\rangle$
ω_2	$\langle \mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle$	$\langle \mathbf{1},\mathbf{0},\mathbf{0}\rangle$
ω_3	$\langle 1,1,1\rangle$	$\langle 1,1,2\rangle$	$\langle 1,2,1\rangle$	$\langle 1,2,2\rangle$

Tableau 14 – Profils des échelles compatibles

Le propriété suivante montre que quelle que soit la restriction utilisée, $\blacktriangle^{\mu}_{\Sigma-p}$ vérifie le postulat de majorité.

Proposition 28 $\forall p \geq p_0, \exists m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} : \blacktriangle^{\mu}_{\Sigma-p}(E \sqcup B_i^m) \models B_i^*$.

Preuve 29 *Soit* $[B_i^*] = \{\omega_1, ..., \omega_l\}$ *les modèles de* B_i^*. *Par définition :*
– $\forall \omega \in [B_i^*],\ \kappa_{B_i}(\omega) = 0$
– *et* $\forall \omega \notin [B_i^*],\ \kappa_{B_i}(\omega) > 0$
Soit $\mathbb{S}_E^P$ *l'ensemble des échelles compatibles. Notons que* $\mathbb{S}_E^P = \mathbb{S}^P_{E \sqcup B_i^m}$.
Définissons :
– $\alpha = max_{\mathcal{S} \in \mathbb{S}_E^P} max_{\omega \in [B_i^*]} \circ (\nu^{E^{\mathcal{S}}}(\omega))$
– *et* $\alpha = max_{\mathcal{S} \in \mathbb{S}^P_{E \sqcup B_i^m}} max_{\omega \in [B_i^*]} \circ (\nu^{(E \sqcup B_i^m)^{\mathcal{S}}}(\omega))$
α *représente le rang maximal que peut avoir un modèle de* B_i^*. *Il est clair que* $\alpha = \beta$. *Alors clairement, si on pose* $m = \alpha + 1$ *et* $E_1 = E \sqcup B_i^*$*, alors* $\circ(\nu^{{E_1}^{\mathcal{S}}}(\omega))$
$\forall \mathcal{S} \in \mathbb{S}^p_{E_1},\ \forall \omega \in [B_i^*],\ \forall \omega' \notin [B_i^*],\ \circ(\nu^{{E_1}^{\mathcal{S}}}(\omega)) < \circ(\nu^{{E_1}^{\mathcal{S}}}(\omega'))$
En effet, $\circ(\nu^{{E_1}^{\mathcal{S}}}(\omega))$ *est au plus égal à* α*, et* ω' *est au mois égal à* m *(car* ω' *viole au moins une formule de* B_i*).*

Lorsque la répétition d'une même base dépasse la borne maximum de l'ensemble de chaque échelle finie compatible pour un ensemble de bases donné, les croyances communes a cette répétition de bases sont en mesure de prévaloir face au croyances d'un agent unique qui pourrait être en désaccord avec la majorité. En d'autres termes, il suffit de borner les échelles compatibles pour vérifier le postulat de majorité.

6 Conclusion et perspectives

La fusion de croyances avec incommensurabilité des échelles de référence est un sujet qui n'a été que peu traité dans la littérature. Nous avons proposé dans cet article une méthode basée sur le concept d'échelle compatible permettant d'étendre les opérateurs de fusion définis uniquement dans le cadre d'échelles commensurables : les opérateurs de fusion égalitaristes et utilitaristes basés respectivement sur le maximum et la somme. Nous avons caractérisé chacun de ces opérateurs au moyen de critères de types « Pareto ». Enfin, nous avons proposé de ne pas considérer l'ensemble des échelles compatibles mais un ensemble fini d'échelles. Dans ce cas, les opérateurs basés sur la somme deviennent majoritaires et donc utilitaristes.
De nombreuses voies restent à explorer, en particulier l'étude d'autres opérateurs de fusion. De plus, cet article s'est basé sur une stratégie de type « best-out » pour obtenir un ordre sur les interprétations. Cependant, d'autres cadres sont possibles, tels que leximin, discrimin, etc. [2].

Références

[1] S. Benferhat, S. Lagrue, and J. Rossit. Maximum-based merging of incommensurable ranked belief bases. In *Proceedings of the 22th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'07)*, pages 367–372, 2007.

[2] S. Coste-Marquis, J. Lang, P. Liberatore, and P. Marquis. Expressive power and succinctness of propositional languages for preference representation. In *Proceedings of KR'2004*, pages 203–212, 2004.

[3] A. Darwiche and J. Pearl. On the logic of iterated belief revision. *Artificial intelligence*, 89 :1–29, 1997.

[4] D. Dubois, J. Lang, and H. Prade. Possibilistic logic. In *Handbook of Logic in Artificial Intelligence and Logic Programming*, volume 3, pages 439–513. Oxford University Press, 1994.

[5] Q. Guilin, W. Liu, and D. A. Bell. Merging stratified knowledge bases under constraints. In *Proceedings of the 21th National Conference on Artificial Intelligence (AAAI'06)*, pages 348–356, july 2006.

[6] S. Konieczny and R. Pino Pérez. On the logic of merging. In *Proceedings of the 6th International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning (KR'98)*, pages 488–498, 1998.

[7] S. Konieczny and R. Pino Pérez. Merging information under constraints : a logical framework. *Journal of Logic and Computation*, 12(5) :773–808, 2002.

[8] P. Liberatore and M. Schaerf. Arbitration : A commutative operator for belief revision. In *Proceedings of the 2nd World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, pages 217–228, 1995.

[9] J. Lin. Integration of weighted knowledge bases. *Artificial Intelligence*, 83(2) :363–378, 1996.

[10] T. Meyer. On the semantics of combination operations. *Journal of Applied Non-Classical Logics*, 11(1-2) :59–84, 2001.

[11] H. Moulin. *Axioms of Cooperative Decision Making*. Cambridge, 1988.

[12] P. Revesz. On the semantics of theory change : arbitration between old and new information. In *Proceedings of the* 12^{th} *ACM SIGACT-SIGMOD-SIGART*

symposium on Principles of Databases, pages 71–92, 1993.

[13] P. Revesz. On the semantics of arbitration. *International Journal of Algebra and Computation*, 7(2) :133–160, 1997.

[14] W. Spohn. Ordinal conditional functions : a dynamic theory of epistemic state. *Causation in Decision, Belief Change and Statistics*, pages 105–134, 1988.

[15] M.-A. Williams. Iterated theory base change : A computational model. In *Proceedings of 14th International Joint Conference on Artificial Intelligence (IJCAI'95)*, pages 1541–1547, 1995.